

# Мыльные пузыри в фотографиях

Л.СВИСТОВ

## Наши наблюдения

Как-то летом на даче были сделаны фотографии мыльных пузырей, одна из них представлена на рисунке 1. Мыльная пленка отражает часть света, и поэтому в пузыре, как в зеркале, можно увидеть предметы, находящиеся вокруг фотографа. Например, деревья или крыши соседних домов. Если очень постараться, то удастся рассмотреть даже самого фотографа. А изображение объектива фотоаппарата находится в центре изображения пузыря.



Рис. 1

Конечно, «зеркальная» поверхность мыльного пузыря – неплоская, и изображения сильно искажены. При этом самые большие искажения возможны на краях пузыря. Несмотря на это, можно заметить, что, помимо пейзажа с крышами и солнцем в верхней половине пузыря, в нижней его половине имеется перевернутое изображение пейзажа. Быть может, это отражение в воде? Но на даче, к сожалению, озера не было. Кроме того, обратим внимание на то, что изображение совсем не такое, как при отражении в воде. Предмет и его

отражение от поверхности воды *зеркально* симметричны, как это видно, например, на рисунке 2. Изображения же в мыльном пузыре – *центрально* симметричны.



Рис. 2

Изображению солнца соответствует еще одно, с другой стороны от центра пузыря. То же самое происходит и с изображениями крыш и деревьев. Взяв линейку, можно убедиться в том, что расстояния от изображения любого предмета до центра мыльного пузыря и от центра до его двойника одинаковые.

Вероятно, у читателей уже имеется объяснение такого необычного изображения. Мы же пока не будем это обсуждать, а обратим внимание на другие любопытные особенности фотографий.

Изображения все же не совсем симметричны. На пузыре видны серии ярких пятен, которые симметрией не обладают (см. рис.1). Такие пятна видны только на фотографиях пузырей, освещенных лучами солнца. Центр окружности, два изображения солнца и яркие пятна находятся на одной прямой, причем около краев пузыря пятна сгущаются. Картина ярких пятен зависит от положения мыльного пузыря по отношению к солнцу и к фотографу.

Предлагаем читателям самостоятельно объяснить природу наблюдаемых эффектов и «расшифровать» пути солнечных лучей. Наше объяснение приводится во второй части статьи, в разделе «Геометрическая оптика мыльного пузыря».

Теперь обратим внимание на цвет ярких пятен. На фотографиях пузыря, сделанных с ярким фоном, как

<sup>1</sup> Фотографии А.Подобедова и Л.Свистова.

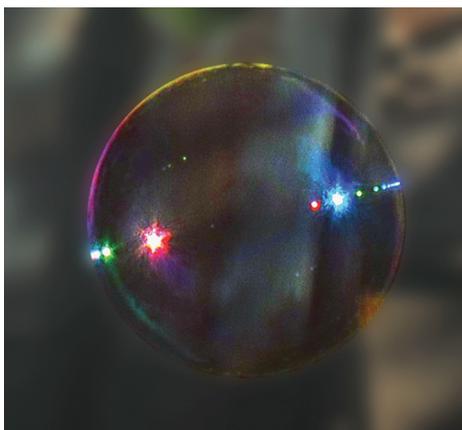


Рис. 3

на рисунке 1, изображения солнца и наблюдаемые пятна – белые. Чтобы увеличить чувствительность к цвету, мы сделали снимки пузыря на темном фоне, выбрав маленькую экспозицию фотоаппарата (рис.3) . Конечно, мыльные пузыри стали видны плохо, но зато яркие пятна на фотографиях стали цветными. В чем причина раскраски? Почему вблизи краев пузыря цвета более насыщенные?

Очень красивыми оказались изображения пузырей при освещении их вспышкой фотоаппарата – на изображениях появилась система разноцветных concentрических сегментов (рис.4).



Рис. 4

Предлагаем читателям самостоятельно поискать объяснение раскраски пятен и сегментов на фотографиях. Наши соображения на эту тему можно будет найти в третьей части статьи, в разделе «Физическая оптика мыльного пузыря».

### Геометрическая оптика мыльного пузыря

Рассмотрим луч, падающий на плоскую границу раздела двух прозрачных сред. Пусть это будет, например, солнечный луч, падающий из воздуха на поверхность воды (рис.5). Тогда среда 1 – воздух, а среда 2 – вода. В точке падения луч частично преломится и будет распространяться в воде, а частично отразится от

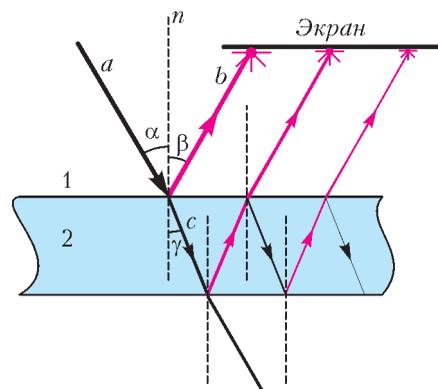


Рис. 5

поверхности раздела и будет распространяться в воздухе. На рисунке 5 изображены падающий (a), отраженный (b) и преломленный (c) лучи, нормаль к поверхности раздела (n), а также углы падения (α), отражения (β) и преломления (γ), отсчитанные, как обычно, от нормали.

Как известно из школьного курса оптики, во-первых, все три луча и нормаль к поверхности раздела лежат в одной плоскости, а во-вторых, углы падения, отражения и преломления связаны соотношениями

$$\alpha = \beta, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1},$$

где  $n_1, n_2$  – показатели преломления сред 1 и 2 соответственно. Интенсивность падающего света делится между интенсивностями отраженного и преломленного света. Деление луча наблюдается также и при его выходе из воды в воздух.

Если луч падает на плоскопараллельную пластинку, например стеклянную, то ожидается несколько параллельных отраженных лучей и несколько параллельных прошедших. Отраженные лучи на рисунке 5 изображены красным цветом, а прошедшие – черным. Такие серии лучей можно увидеть в эксперименте, если падающий луч достаточно узкий. Например, если использовать узкий луч лазерной указки и толстое, скажем оконное, стекло. Экраном может служить потолок. В случае широкого (по сравнению с толщиной пластины) луча все прошедшие и все отраженные лучи сольются в широкий отраженный луч и в широкий прошедший.

Теперь попробуем разобраться, что видит наш глаз или что фиксирует на изображении мыльного пузыря фотоаппарат. Прежде всего, отметим, что схемы лучей на рисунке 5 не совсем полные. Они справедливы только для абсолютно прозрачных тел. Воду, а тем более мыльную воду, такой не назовешь. Действительно, при прохождении световых лучей через воду энергия луча частично переходит в тепло и частично в энергию рассеянного света. Благодаря рассеянному свету мы видим мыльный пузырь как объект сферической формы.

Попробуем объяснить, почему на фотографии пузыря наблюдается несколько изображений.

Во-первых, внешняя поверхность пузыря является выпуклым зеркалом для предметов, находящихся в

направлении фотографа. Если это далекие предметы, такие как солнце, деревья и крыши домов, то каждое изображение будет мнимым, прямым и находится оно будет вблизи фокуса такого выпуклого зеркала – на расстоянии, равном половине радиуса сферы, т.е.  $R/2$ .

Во-вторых, лучи, исходящие от тех же предметов, частично проходят внутрь пузыря и отражаются от его внутренней поверхности, которая является для них вогнутым зеркалом. Отраженные лучи будут давать второе изображение предмета, находящееся на расстоянии  $R/2$  от внутренней поверхности сферы. Это изображение будет перевернутым и действительным.

Оба изображения находятся внутри мыльного пузыря, и расстояние между ними приблизительно равно  $R$ . Фотоаппарат во время съемки находится на расстоянии гораздо большем, чем радиус пузыря. Поэтому на фотографии изображения получаются резкими и центрально симметричными.

Если рассмотреть фотографии более внимательно, то можно увидеть большее число наложенных изображений. Например, на рисунке 1 хорошо видны изображения досок сарая, которые находятся за мыльным пузырем. Изображение досок получается в результате двух последовательных отражений от двух вогнутых внутренних поверхностей пузыря. Вообще говоря, можно наблюдать изображения, получающиеся в результате большего чем два числа отражений от внутренней поверхности пузыря. Тем не менее, хорошо видны изображения, получающиеся в результате многих отражений только от очень ярких объектов, таких как солнце или вспышка фотоаппарата, поскольку интенсивность света с каждым отражением быстро убывает.

Можно предположить, что яркие пятна на фотографиях – это изображения солнца, получающиеся в результате нескольких отражений от внутренней поверхности пузыря. Попробуем найти местоположения этих изображений и проверить нашу гипотезу. Пусть лучи от солнца падают на пленку мыльного пузыря, частично отражаясь и частично проходя сквозь нее. Поскольку пленка очень тонкая, то прошедший луч будет с хорошей точностью продолжением падающего. Попав внутрь мыльного пузыря, луч начинает свое путешествие внутри него. На рисунке 6 изображен путь одного из таких лучей внутри мыльного пузыря сферической формы. При этом после каждого отражения от

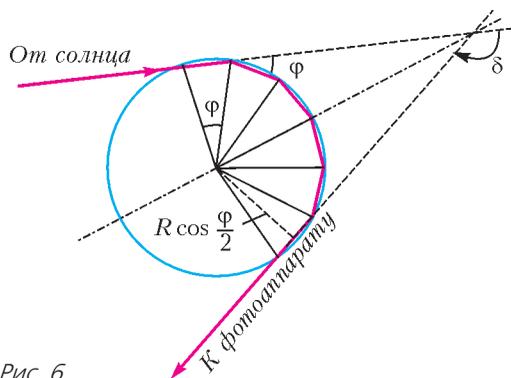


Рис. 6

внутренней поверхности пузыря луч становится менее интенсивным.

Понятно, что световой луч, падающий на мыльный пузырь, и все лучи, получающиеся в результате отражений луча внутри пузыря, находятся в одной плоскости, проходящей через центр пузыря. Наши читатели, несомненно, знакомы с основами стереометрии и смогут это легко доказать, используя законы отражения и преломления света. Впрочем, это можно понять вообще ничего не доказывая. Действительно, проведем плоскость через падающий луч и центр сферы. Эта плоскость разделит сферу на две одинаковые половинки. Для определенности будем называть одну половинку верхней, а другую – нижней. Отметим, что понятия верха и низа здесь условные, так как они зависят от ориентации наблюдателя, т.е. от того, где находится его голова, а где – ноги. Очевидно, что у падающего луча есть проблема выбора. Если он отдаст предпочтение верхней полусфере и отразится в какую-то ее точку, то он «обидит» нижнюю, а она ничем не хуже верхней. Единственная возможность не «обидеть» ни одну из полусфер – это оставаться в проведенной плоскости после всех отражений.

Будем для простоты считать, что солнечные лучи, падающие на пузырь, параллельны, или, другим словами, будем считать солнце удаленным точечным источником света. Тогда все лучи, попадающие в объектив фотоаппарата, находятся в плоскости, проходящей через солнце, фотоаппарат и центр мыльного пузыря. Чтобы попасть в объектив фотоаппарата, солнечный луч должен в результате отражений повернуться на угол  $\delta$ , определяемый их взаимным расположением.

На рисунке 7 показаны лучи, приходящие в объектив после одного отражения. Эти лучи зададут положения двух самых ярких изображений солнца, симметрично расположенных на фотографии. Расстояние от центра пузыря до этих лучей будет  $AO = OB = R \cos \frac{\delta}{2}$ . На фотографиях изображения будут находиться на расстоянии  $R' \cos \frac{\delta}{2}$  от центра, где  $R' \frac{2}{2}$  радиус изображения пузыря. Используя фотографии, с помощью циркуля и линейки мы можем построить угол  $\delta$ . Заметим, что непосредственное измерение угла между удаленными объектами является очень непростой экспериментальной задачей, особенно если учесть, что один из объектов летит.

Займемся теперь изображениями солнца, получаемыми в результате многократного отражения лучей от внутренней поверхности пузыря.

На рисунке 6 показаны солнечные лучи, которые, отразившись пять раз от внутренней поверхности пузыря, попадают в фотоаппарат. При каждом отражении луч поворачивается на один и тот же угол  $\phi$ . Угол

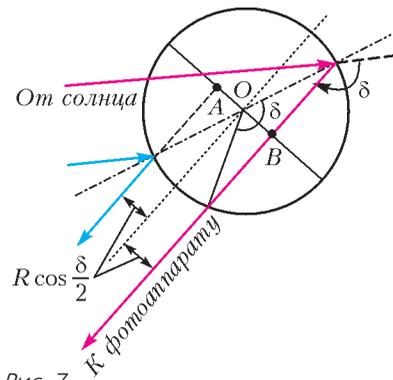


Рис. 7

$\varphi$  зависит от места падения его на мыльный пузырь и может изменяться в пределах  $-180^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ . В фотоаппарат попадет только такой луч, который после нескольких отражений повернется на угол  $\delta$  ( $-180^\circ < \delta \leq$

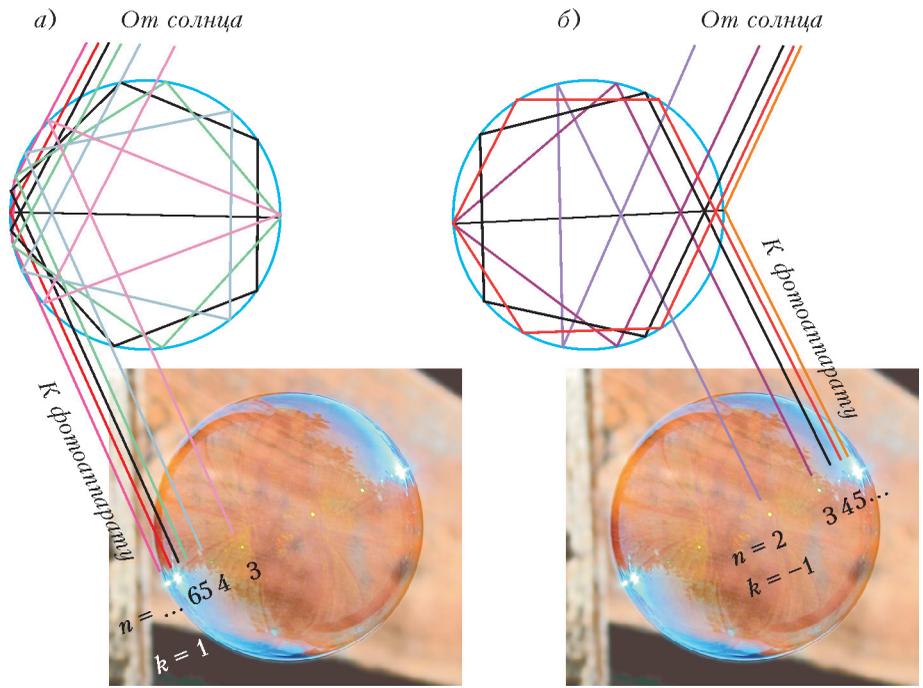


Рис. 8

Рис. 9

$\leq 180^\circ$ ). Это условие можно записать в виде уравнения  $n\varphi = \delta + k \cdot 360^\circ$ .

Здесь натуральное число  $n$  определяет число отражений луча от внутренней поверхности пузыря, а целое число  $k$  – число поворотов луча на полный угол, которые он совершает, прежде чем выйти из пузыря и попасть в объектив фотоаппарата. При этом знак  $k$  определяет направление поворота. На фотографиях засвеченная точка ожидается удаленной от центра изображения на расстоянии  $R' \cos(\varphi/2)$ , где  $R'$  – радиус изображения.

На рисунке 8 на фотографии пузыря рисками помечены вычисленные положения изображений, полученные для различных значений  $k$ . Для наглядности риски, соответствующие разным  $k$ , имеют разные длины. Интенсивность изображений спадает с ростом числа отражений, поэтому лучше всего видны изображения с  $k = 0, \pm 1$ . Видно, что ожидаемые положения изображений с разными  $k$  и  $n$  неплохо согласуются с положениями ярких пятен на фотографиях.

По фотографии можно восстановить ход солнечных лучей, попадающих в фотоаппарат. На рисунке 9,а изображен ход лучей, дающих изображения, которые внутри пузыря поворачиваются на положительный угол ( $\varphi > 0$ ), а на рисунке 9,б – на отрицательный угол ( $\varphi < 0$ ). Напомним, что все лучи находятся в плоскости, проходящей через солнце, фотоаппарат и пузырь.

Вернемся теперь к фотографиям, полученным при освещении встроенной вспышкой фотоаппарата (см. рис.4). Лучи от вспышки и лучи, попадающие в объектив после отражений, с хорошей точностью располагаются на параллельных прямых. В этом случае любая плоскость, проходящая через объектив и центр пузыря, будет содержать лучи от вспышки. Поэтому набор ярких точек должен наблюдаться в каждой из таких плоскостей, т.е. изображения вспышки следует

ожидать в виде концентрических окружностей. В эксперименте же наблюдаются не полные окружности, а дуги. Это можно объяснить тем, что встроенная вспышка находится на небольшом расстоянии от объектива. Иными словами, падающие и отраженные лучи все-таки не совсем параллельны.

Чтобы определить радиусы ярких окружностей, нужно в приведенное выше уравнение подставить значение  $\delta$ , равное  $180^\circ$ :

$$n\varphi = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

Радиусы наиболее ярких окружностей ( $k = 0$ ) определяются соотношением

$$r = R' \cos \frac{180^\circ}{2n}$$

Это радиусы окружностей, вписанных в правильные многоугольники с четным числом сторон, равным  $2n$ , которые, в свою очередь, вписаны в изображение мыльного пузыря. И это соответствует наблюдению – этот удивительный результат проиллюстрирован на рисунке 10.

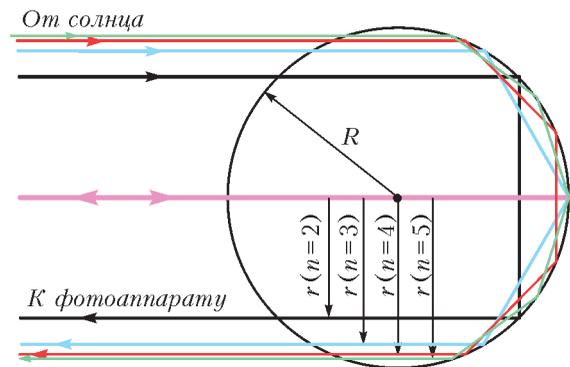


Рис. 10

(Продолжение см. на с. 13)

# Интеграл и оценки сумм

А.ЕГОРОВ

**В**ОЗМОЖНО, ВАМ ПРИХОДИЛОСЬ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ, связанные с оценками величины сумм вида

$$S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n), \quad (1)$$

где  $f$  – некоторая функция. Примером может служить задача М812, опубликованная в «Задачнике «Кванта» в 1983 году (автор С.Майзус):

Докажите, что при всех натуральных  $n$  справедливо неравенство

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2.$$

Более или менее ясно, что вычислить эту сумму мы не сможем. Но ведь точное значение суммы нам и не нужно. Нужна оценка.

Приведем авторское решение.

**Решение.** Заметим, что

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}}{k(k+1)} = \sqrt{k} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= \sqrt{k} \left( \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) = \\ &= \left( 1 + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) < 2 \left( \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right). \end{aligned}$$

Сложив полученные неравенства при  $k = 1, 2, \dots, n$ , получим

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &< 2 \left( \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \dots \\ &\dots + 2 \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} < 2. \end{aligned}$$

В этом решении использован довольно изящный искусственный прием, додуматься до которого не очень просто.

Еще труднее доказать, например, такое неравенство:

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}} < 3$$

при всех натуральных  $n$ .

**Упражнение 1.** Прodelайте это.

## Асимптотические выражения

Сама по себе задача о вычислении сумм вида

$$S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n),$$

где  $f$  – некоторая функция, как правило (за исключением таких простых сумм, как сумма арифметической и геометрической прогрессий, а также некоторых сумм,

которые с помощью преобразований приводятся к более простым), безнадежно сложна. Даже такую на вид простую сумму, как

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

записать в свернутом виде  $H_n = \Phi(n)$ , где  $\Phi(n)$  – некоторая достаточно обозримая функция от  $n$ , невозможно. Однако (даже чаще всего) бывает важно знать, как ведет себя сумма  $S_n$  (в частности,  $H_n$ ) при больших значениях  $n$  (или, как говорят математики, при  $n \rightarrow \infty$ ). А для этого иногда удается найти так называемое *асимптотическое* выражение суммы  $S_n$ , т.е. найти такую сравнительно простую функцию  $\Phi(n)$ , для которой отношение  $\frac{S_n}{\Phi(n)}$  стремится к 1 при  $n$ , стремящемся к бесконечности. В таком случае мы будем писать

$$S_n \sim \Phi(n).$$

Так, для хорошо известной суммы

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_2(n) \sim \frac{n^3}{3}.$$

Вообще же, как мы увидим дальше,

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p \sim \frac{n^{p+1}}{p+1} \quad \text{при } p > -1,$$

а  $H_n \sim \ln n$ .

Дальше мы поговорим об одном общем методе оценки сумм вида (1)

## Если функция $f$ убывает

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна и убывает при  $x > 0$ . Предположим также, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Пусть  $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ .

Нарисуем график функции  $f$  (рис.1). Легко видеть, что сумма  $f(2) + f(3) + \dots + f(n)$  равна площади голубой ступенчатой фигуры, показанной на рисунке 1, а, а она меньше площади криволинейной трапеции  $ABCD$ .

В свою очередь, площадь криволинейной трапеции – это интеграл  $\int_1^n f(x) dx$ . Из сказанного следует, что

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n) < \int_1^n f(x) dx. \quad (2)$$

Точно так же площадь красной ступенчатой фигуры на рисунке 1, б больше площади той же криволинейной

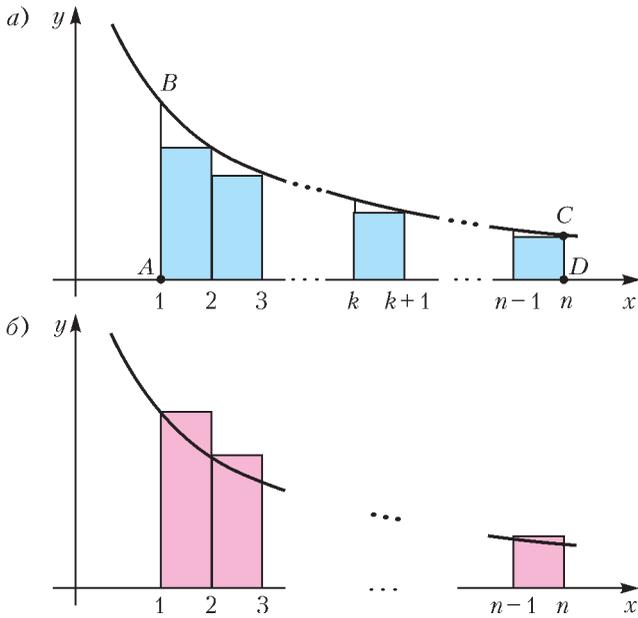


Рис. 1

трапеции, и потому

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) > \int_1^n f(x) dx. \quad (2')$$

Прибавляя  $f(1)$  к обеим частям неравенства (2) и  $f(n)$  к обеим частям неравенства (2'), получим оценку

$$f(n) + \int_1^n f(x) dx < S_n < f(1) + \int_1^n f(x) dx. \quad (3)$$

Мы получили двухстороннюю оценку суммы  $S_n$ .

Рассуждая аналогично, можно получить и более точные оценки суммы  $S_n$ , если оценивать с помощью интеграла не всю сумму  $S_n$ , а только сумму слагаемых, начиная с некоторого  $k > 1$ :

$$S_{k-1} + f(n) + \int_k^n f(x) dx < S_n < S_k + \int_k^n f(x) dx. \quad (3')$$

Для этого будем оценивать так же, как и раньше, сумму

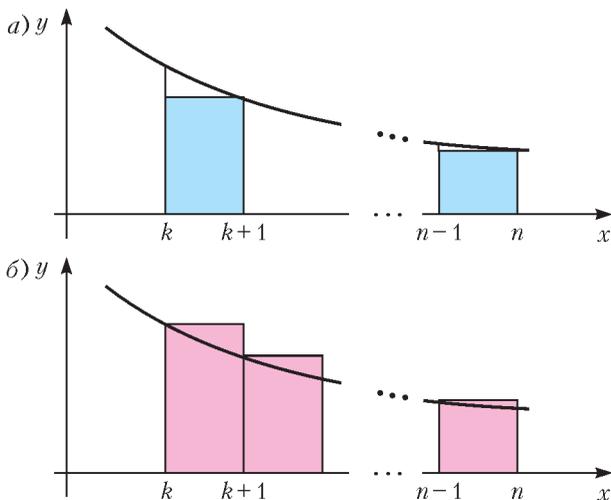


Рис. 2

$f(k) + f(k+1) + \dots + f(n)$  (рис. 2, а и б). Сравнение площадей ступенчатых фигур дает неравенства

$$f(k+1) + \dots + f(n) < \int_k^n f(x) dx \quad (*)$$

и

$$f(k) + \dots + f(n-1) > \int_k^n f(x) dx. \quad (**)$$

Прибавляя к обеим частям неравенств (\*) и (\*\*) недостающие слагаемые, получаем неравенства (3').

**Упражнения**

2. Докажите, что при  $p > 1$  и при всех  $n \in \mathbb{N}$  справедливо неравенство

$$\frac{1}{p-1} \left( 1 - \frac{1}{n^{p-1}} \right) < 1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p} < \frac{p}{p-1}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{p-1} \leq 1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \leq \frac{p}{p-1}.$$

3. Докажите, что

$$\frac{1}{n} + \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < \ln n + 1$$

(из результата этого упражнения следует, что  $H_n \sim \ln n$ ).

Попробуем теперь применить полученные оценки к сумме из задачи М812. Из (2) сразу получается, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < \frac{1}{2} + \int_1^n \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}},$$

и у нас возникают трудности с вычислением интеграла. Пока сообщим читателям, что первообразная подынтегральной функции равна  $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ . Тогда сразу (по формуле Ньютона – Лейбница) получается оценка

$$S_n < \frac{1}{2} + 2 \left( \operatorname{arctg}\sqrt{n} - \frac{\pi}{4} \right) < \frac{1}{2} + 2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

К сожалению, правая часть больше двух, так что в этой задаче искусственный прием дает лучший результат, чем общий метод.

Уточнить оценку можно с помощью неравенства (3'). Пусть  $k = 2$ . Тогда

$$\begin{aligned} S_n &< \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \int_2^n \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} < \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{2} < 1,97 \end{aligned}$$

(последняя оценка без труда получается с помощью калькулятора).

Это уже лучше, чем оценка из условия задачи. Однако нас не покидает чувство некоторой неудовлетворенности: откуда мы взяли первообразную подынтегральной функции? Хорошо, конечно, если мы ее знаем. Ну а если нет?

Тогда тоже находится выход. Легко видеть, что

$$\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} < \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-3/2}.$$

Поэтому, в силу (3') и поскольку первообразная функции  $f(x) = x^{-3/2}$  равна  $-\frac{2}{\sqrt{x}}$ , имеем

$$S_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} + \int_k^n x^{-3/2} dx = \\ = S_k + \frac{2}{\sqrt{k}} - \frac{2}{\sqrt{n}} < S_k + \frac{2}{\sqrt{k}},$$

так что при  $k = 4$  получаем

$$S_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{10} + 1 < 1,99.$$

**Упражнение 4.** Решите теперь упражнение 1.

Заметим, что, даже изменив функцию, мы получили оценку лучшую, чем в условии.

Неравенства (3) позволяют судить о поведении сумм  $S_n$  при больших  $n$ . Рассмотрим последовательность

$$u_n = S_n - \int_1^n f(x) dx.$$

Из (3) следует, что

$$f(n) < u_n < f(1).$$

Поэтому  $u_n$  – ограниченная последовательность. В то же время легко видеть, что  $u_n$  убывает, т.е.  $u_{n+1} < u_n$ .

**Упражнение 5.** Убедитесь в этом.

Из теоремы Вейерштрасса о существовании предела ограниченной монотонной последовательности следует, что существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = c$ . Таким образом,

$$S_n = \int_1^n f(x) dx + c + \varepsilon_n, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_n = u_n - c$  стремится к нулю.

Мы установили, что при больших  $n$  сумма  $S_n$  с точностью до постоянного слагаемого  $c$  и величины  $\varepsilon_n$ , стремящейся к нулю, равна интегралу. Это замечательный результат.

Например, для функции  $y = \frac{1}{x}$  получаем

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \gamma + \ln n + \varepsilon_n.$$

Число  $\gamma$  в этом равенстве – очень важная константа. Она называется *постоянной Эйлера* и часто встречается в задачах анализа и теории чисел. Любопытно заметить, что о самом числе  $\gamma = 0,557\dots$  до сих пор мало что известно. Никто не знает, например, является ли оно рациональным или иррациональным.

### Числовые ряды

Формальная сумма  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,

где  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  – некоторая последовательность действительных чисел, называется *числовым рядом*. Понятие ряда – одно из важнейших понятий современной математики. Нас будут интересовать ряды с положительными членами:  $a_i > 0$  при всех  $i \in \mathbb{N}$ .

Ряд называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм, т.е. сумм вида  $S_1 = a_1$ ,  $S_2 = a_1 + a_2$ , ...,  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , ..., имеет предел. Из теоремы Вейерштрасса следует, что сходимость ряда с положительными членами равносильна ограниченности последовательности  $S_n$ .

Формула (4) дает так называемый интегральный признак сходимости ряда

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Именно, такой ряд при монотонной и стремящейся к нулю функции  $f$  сходится тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = \int_1^{\infty} f(x) dx.$$

### Упражнения

**6.** Исследуйте сходимость рядов:

а)  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \dots$ ;

б)  $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ , где  $p > 0$ ;

в)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ .

**7.** Докажите, что если ряд с положительными членами  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, а  $0 < b_n \leq a_n$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  тоже сходится.

**8.** Докажите для любой положительной возрастающей функции  $f$  неравенства

$$f(1) + \int_1^n f(x) dx < S_n < f(n) + \int_1^n f(x) dx.$$

**9.** Найдите оценки суммы

$$S_p(n) = 1 + 2^p + \dots + n^p \text{ при } p > 1$$

и докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

**10.** Найдите сумму

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$$

Подводя итоги, скажем, что в случае, когда сумма

$$S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$$

стремится к бесконечности, т.е. ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  расходится, справедливо асимптотическое выражение

$S_n \sim \int_1^n f(x) dx$ . Для очень многих функций интеграл удастся вычислить и, тем самым, получить асимптотику суммы.

### Некоторые оценки

Теперь докажем некоторые оценки интегралов, нужные нам для дальнейшего.

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на отрезке  $[a; b]$ , непрерывна, выпукла вверх и положительна на этом

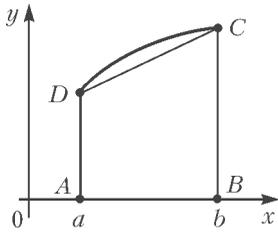


Рис. 3

неравенство

$$\int_a^b f(x) dx \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a). \quad (5)$$

Будем также считать, что наша функция имеет производную во всех точках отрезка  $[a; b]$ . Из существования производной следует, что в каждой точке графика функции существует касательная, причем криволинейная трапеция расположена под касательной (это общее свойство выпуклых вверх функций).

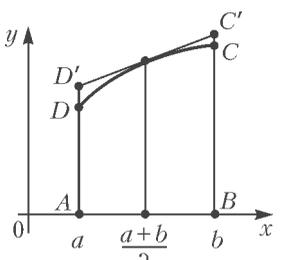


Рис. 4

В частности, под касательной, проведенной в точке  $\left(\frac{a+b}{2}; f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ . Ясно, что площадь обычной трапеции  $ABC'D'$  (рис. 4) больше площади криволинейной трапеции, а так как  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  – средняя линия трапеции  $ABC'D'$ , то справедливо неравенство

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \geq \int_a^b f(x) dx. \quad (6)$$

**Случай возрастающей функции  $f$**

Рассмотрим сумму

$$S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n),$$

где  $f$  – возрастающая, непрерывная и выпуклая вверх при  $x \geq 1$  функция, имеющая во всех точках производную, т.е. функция, график которой «похож» на графики функций  $y = \ln x$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \sqrt[3]{x}$  и т.п. Площадь криволинейной трапеции такой функции на отрезке  $[1; n]$  равна  $\int_1^n f(x) dx$ . Рассмотрим фигуру, образованную трапециями, закрасненными голубым цветом (рис.5). Площадь обычной трапеции на отрезке

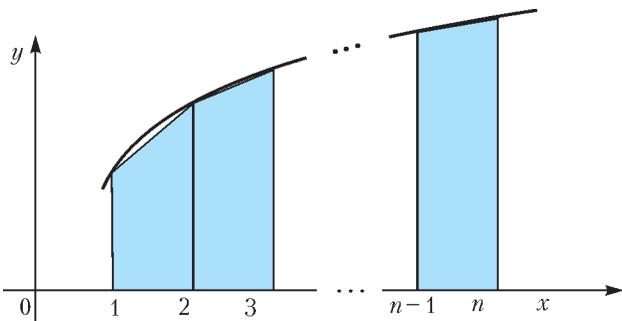


Рис. 5

$[k-1; k]$  равна  $\frac{f(k-1)+f(k)}{2}$ , а сумма площадей всех трапеций равна

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \frac{f(1)+f(2)}{2} + \frac{f(2)+f(3)}{2} + \dots + \frac{f(n-1)+f(n)}{2} = \\ &= \frac{f(1)}{2} + f(2) + \dots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2}. \end{aligned}$$

В силу неравенства (5)  $\sigma(n)$  меньше площади криволинейной трапеции, т.е.

$$\sigma(n) < \int_1^n f(x) dx.$$

Мы докажем, что разность

$$\Delta_n = \int_1^n f(x) dx - \sigma(n)$$

стремится к некоторому конечному пределу и уже

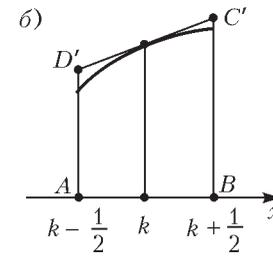
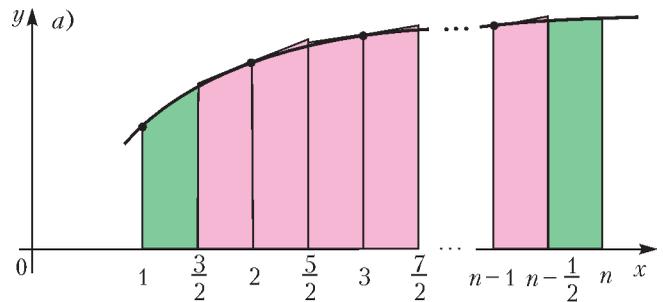


Рис. 6

отсюда получим оценку суммы  $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$  с помощью интеграла. Для этого нам понадобится еще одна оценка суммы  $\sigma(n)$ .

Рассмотрим криволинейные трапеции на отрезках  $\left[k - \frac{1}{2}; k + \frac{1}{2}\right]$  при  $k = 2, 3, \dots$

$\dots, n-1$  (рис. 6,а), проведем при  $x = k$  касательную к графику функции и рассмотрим обычную трапецию  $ABC'D'$ . Ее площадь равна  $f(k)$  (рис. 6,б).

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} \int_1^n f(x) dx &\leq \\ &\leq \int_1^{3/2} f(x) dx + f(2) + \dots + f(n-1) + \int_{n-1/2}^n f(x) dx. \end{aligned}$$

Площадь зеленого кусочка, равная  $\int_{n-1/2}^n f(x) dx$ , меньше площади прямоугольника с основанием  $\frac{1}{2}$  и высотой  $f(n)$ , т.е. меньше  $\frac{f(n)}{2}$ . Итак, для площади всей криволинейной трапеции на отрезке  $[1; n]$  получаем неравенство

$$\int_1^n f(x) dx \leq \int_1^{3/2} f(x) dx + f(2) + \dots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2}.$$

Последнее неравенство можно записать так:

$$\begin{aligned} \int_1^n f(x) dx &\leq \\ &\leq \int_1^{3/2} f(x) dx - \frac{f(1)}{2} + \frac{f(1)}{2} + f(2) + \dots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} = \\ &= \int_1^{3/2} f(x) dx - \frac{f(1)}{2} + \sigma(n). \end{aligned}$$

Итак,

$$\Delta_n = \int_1^n f(x) dx - \sigma(n) \leq \int_1^{3/2} f(x) dx - \frac{f(1)}{2}.$$

Последовательность  $\Delta_n$  возрастает. Это почти очевидно, поскольку  $\Delta_{n+1}$  отличается от  $\Delta_n$  на площадь соответствующей «горбушки».

Из теоремы Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности следует, что последовательность  $\Delta_n$  имеет предел. Обозначим этот предел буквой  $L$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = L$ . Это, в свою очередь, значит, что

$$\int_1^n f(x) dx - \sigma(n) = L + \varepsilon_n,$$

где  $\varepsilon_n$  стремится к нулю.

Перепишем последнее равенство так:

$$\sigma(n) = -L - \varepsilon_n + \int_1^n f(x) dx,$$

$$\frac{f(1)}{2} + f(2) + \dots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} = -L - \varepsilon_n + \int_1^n f(x) dx.$$

Прибавляя к левой и правой частям  $\frac{f(1)}{2}$  и  $\frac{f(n)}{2}$ , получаем

$$S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) = C + \frac{f(n)}{2} + \int_1^n f(x) dx + \alpha_n, \quad (7)$$

где  $C = \frac{f(1)}{2} - L$  – константа, а  $\alpha_n \rightarrow 0$ . Мы получили выражение суммы  $S_n$  через интеграл с точностью до величины, стремящейся к нулю.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть  $f(x) = \sqrt{x}$ . Тогда

$$\begin{aligned} S_n &= \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} = \\ &= C + \frac{1}{2} \sqrt{n} + \int_1^n \sqrt{x} dx + \alpha_n = C' + \frac{1}{2} \sqrt{n} + \frac{2}{3} n \sqrt{n} + \alpha_n, \end{aligned}$$

где  $C'$  – некоторая константа. При этом

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} \sim \frac{2}{3} n \sqrt{n}.$$

Аналогично,

$$\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \dots + \sqrt[3]{n} \sim \frac{3}{4} n \sqrt[3]{n}.$$

## Асимптотика факториала

Числа  $n!$  с увеличением  $n$  растут очень быстро. Заметим, что  $\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n$ , а функция  $\ln$  «устроена» так же, как функция, для которой справедлива формула (7). Запишем соответствующее равенство:

$$\ln n! = C + \frac{1}{2} \ln n + \int_1^n \ln x dx + \alpha_n.$$

Нетрудно доказать, что

$$\int_1^n \ln x dx = n \ln n - n + 1.$$

Следовательно

$$\ln n! = C'_1 + \frac{1}{2} \ln n + n \ln n - n + \alpha_n,$$

откуда

$$n! = e^{C'_1} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n} = K \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \gamma_n,$$

где  $K = e^{C'_1}$ , а  $\gamma_n = e^{\alpha_n}$  стремится к 1 при  $n \rightarrow \infty$ . Пока мы не знаем, чему равна константа  $K$ . Во всяком случае, уже ясен характер роста чисел  $n!$ . Итак,

$$n! \sim K \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (8)$$

Найти эту константу нам поможет еще одна замечательная формула, которую мы скоро докажем.

## Формула Валлиса<sup>1</sup>

Для дальнейшего нам придется вспомнить некоторые формулы анализа.

Пусть функции  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют непрерывные производные на некотором промежутке  $[a; b]$ . По формуле для производной произведения,

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Проинтегрируем это равенство на отрезке  $[a; b]$ :

$$\int_a^b (u(x)v(x))' dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

Это значит, что

$$\int_a^b v'(x)u(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям. Ее обычно записывают так (учитывая, что  $f'(x)dx = df$ ):

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Рассмотрим интеграл

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx, \text{ где } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

<sup>1</sup> Джон Валлис (1616 – 1703) – английский математик, один из основателей Лондонского Королевского общества.

Этот интеграл – площадь криволинейной трапеции функции  $y = \sin^n x$  на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . Поскольку  $\sin x dx = d(-\cos x)$ , то при  $n \geq 2$  получим

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x d(-\cos x) = \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \\ &= (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n, \end{aligned}$$

откуда  $nJ_n = (n-1)J_{n-2}$ , или  $J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$ . Мы получили рекуррентную формулу, выражающую  $J_n$  через  $J_{n-2}$ . Продолжая этот процесс, получим

$$\begin{aligned} J_{n-2} &= \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)} J_{n-4}, \\ J_{n-4} &= \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{n(n-2)(n-4)} J_{n-6}, \end{aligned}$$

и т.д.

Если  $n = 2k$  чётно, то этот процесс будет продолжаться до  $n = 0$ , и мы получим равенство

$$J_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3) \dots \cdot 1}{2k(2k-2) \dots \cdot 2} J_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(поскольку  $J_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$ , а по определению  $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)$ ,  $(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k$ ). Аналогично, при  $n = 2k+1$

$$J_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} J_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},$$

так как  $J_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$ .

Подготовительная работа закончена. Запишем при  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  очевидные неравенства

$$\sin^{2n-1} x \geq \sin^{2n} x \geq \sin^{2n+1} x$$

и соответственно

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx \geq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx \geq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx.$$

Это значит, что

$$\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \geq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \geq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

или (разделим все неравенства на правую часть)

$$\frac{2n+1}{2n} \geq \frac{(2n-1)!!(2n+1)!!}{((2n)!!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \geq 1.$$

Если  $n \rightarrow +\infty$ , левая часть стремится к 1 и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n-1)!!(2n+1)!!}{((2n)!!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = 1.$$

Поэтому

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right)^2 (2n+1). \quad (9)$$

Это и есть удивительная формула Валлиса для числа  $\pi$ . Перепишем ее так:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sqrt{2n+1}. \quad (9')$$

### Формула Стирлинга<sup>2</sup>

Теперь мы в состоянии найти константу  $K$  в формуле (8). Запишем формулу (9') в виде

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!! \sqrt{2n+1}} \varepsilon_n,$$

где  $\varepsilon_n \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Заметим, что двойные факториалы выражаются через обычные:

$$(2n)!! = 2^n \cdot n!, \quad (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!},$$

откуда

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{2n+1}} \varepsilon_n. \quad (10)$$

Но, по формуле (8),

$$n! = K \sqrt{n} \left( \frac{n}{e} \right)^n \gamma_n, \quad (2n)! = K \sqrt{2n} \left( \frac{2n}{e} \right)^{2n} \gamma_{2n}, \quad (11)$$

величины  $\varepsilon_n$ ,  $\gamma_n$  и  $\gamma_{2n}$  стремятся к 1 при  $n \rightarrow \infty$ . Подставляя выражения (11) в формулу (10), получим после упрощений

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{2^{2n} \cdot K^2 n \left( \frac{n}{e} \right)^{2n} \gamma_n^2}{K \sqrt{2n} \left( \frac{2n}{e} \right)^{2n} \sqrt{2n+1} \gamma_{2n}} \varepsilon_n = \frac{Kn \gamma_n^2}{\sqrt{4n^2 + 2n} \gamma_{2n}} \varepsilon_n.$$

При  $n \rightarrow \infty$  правая часть имеет предел, равный

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Kn \gamma_n^2}{\sqrt{4n^2 + 2n} \gamma_{2n}} \varepsilon_n = \frac{K}{2}.$$

Итак,

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{K}{2}, \quad K = \sqrt{2\pi}.$$

<sup>2</sup> Джеймс Стирлинг (1692 – 1770) – шотландский математик.

Окончательно получаем

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \varepsilon_n. \quad (12)$$

где  $\varepsilon_n \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Формула (12) и есть знаменитая формула Стирлинга. Она как бы соединяет различные разделы математики: теорию чисел – функция  $n!$ , анализ – число  $e$  и геометрию – число  $\pi$ .

Отметим еще, что более кропотливое исследование позволяет уточнить поведение последовательности  $\varepsilon_n$ , а именно:  $\varepsilon_n = e^{Q_n/12n}$ , где  $|Q_n| < 1$ , так что формулу Стирлинга можно использовать для приближенных вычислений и оценок.

Например, рассмотрим число  $C_{2n}^n$ . Изначально про него мы можем сказать только, что оно очень большое при больших  $n$ . Попробуем найти асимптотическое выражение, подставляя выражения факториалов по

формуле Стирлинга:

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \varepsilon_{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \varepsilon_n\right)^2} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \alpha_n,$$

где  $\alpha_n \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Окончательно,

$$C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Такого рода рассуждения часто встречаются в комбинаторике, теории вероятностей и теории чисел.

#### Упражнения

**11.** Найдите асимптотические выражения для  $(2n)!!$  и  $(2n-1)!!$ ,  $(n+1)(n+2)\dots(2n)$ .

**12.** Колоду карт, состоящую из 52 карт, наудачу разделяют на 2 части по 26 карт. Какова вероятность того, что в обеих частях окажется по равному числу красных и черных карт?

## Мыльные пузыри в фотографиях

(Начало см. на с. 2)

Заканчивая разговор о геометрической оптике мыльного пузыря, обратим внимание на то, что на фотографиях есть еще много загадочного. Например: почему размер изображения, получаемого в результате многократных отражений, уменьшается с увеличением числа отражений? Кроме того, остались нерешенными некоторые экспериментальные проблемы. Пузыри – очень подвижные «фотомодели», поэтому, для того чтобы получить желаемое изображение хорошей четкости, нам приходится делать большое число фотографий в безветренную погоду, после чего выбирать из них лучшие. Конечно, было бы удобнее, если бы пузырь удалось зафиксировать в какой-либо точке пространства, не нарушив его сферичности. Сделать это нам пока не удалось. Может быть, кому-либо из читателей удастся решить эту проблему и сделать фотографии пузырей с еще большим количеством изображений.

### Физическая оптика мыльного пузыря

Почему изображения солнца и вспышки на фотографиях пузырей цветные? Почему у каждого изображения свой цвет? Можно ли предсказать последовательность цветов? Попробуем ответить на эти вопросы.

Солнечный свет, попадающий на мыльный пузырь, содержит весь цветовой спектр. Совокупность составляющих солнечный свет лучей разных цветов воспринимается нашим глазом как белый свет. Интенсивность лучей разных цветов задается солнцем. Если нарушить баланс интенсивностей составляющих солнечный свет лучей разных цветов, то совокупный луч станет цветным. Например, если почему-то усилится интенсивность лучей красного цвета, то совокупный луч окра-

сится в красный цвет. При падении солнечного луча на мыльную пленку некоторая его часть проходит через пленку, а некоторая отражается. Благодаря явлению *интерференции* пропорция, в которой происходит такое деление луча, зависит от длины волны света, или, другими словами, от его цвета. Заметим, что если поглощение и рассеяние света на пленке незначительно, то сумма прошедшего и отраженного лучей будет снова белой.

Обсуждаемые нами изображения солнца на фотографиях получены в результате ряда отражений света от внутренней поверхности пузыря. Каждое прохождение и отражение от пленки приводит к окрашиванию луча. Поскольку угол падения луча на пленку при путешествии его внутри мыльного пузыря один и тот же, каждое дополнительное отражение должно приводить к увеличению интенсивности окраски изображения.

Фотографии пузырей подтверждают это. Действительно, цвет изображения вспышки на фотографиях наиболее насыщен на изображениях, полученных в результате большого числа отражений от внутренней поверхности пузыря. Напомним, что изображениям вспышки, полученным в результате большего числа отражений, соответствуют дуги большего радиуса.

Чтобы разобраться с последовательностью цветов изображений солнца и вспышки на фотографиях, достаточно вспомнить раздел не геометрической, а физической оптики, а именно – интерференцию света на тонких пленках. Но дабы не делать статью более громоздкой, оставим решение этой задачи читателям. Заметим только, что это решение не требует знаний, превышающих школьный курс физики.

Надеемся, что возможность сравнить результат рассуждений с наблюдением доставит читателям удовольствие.